16.01.2016
MARÍA ALSO

EEC 2 - MATEMÁTICAS.

EJERCICIO 1. Consideramos en el espacio de las funciones continuas en el intervalo $[\emptyset,1]$, $C[\emptyset,1]$, el producto escalar:

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$$

para $f,g \in C[\emptyset,1]$. El producto escalar entre

$f(x) = x^2 - 1$

es ?

$g(x) = x$

$$\boxed{\int_0^1 (x^2-1)\cdot x\;dx} = \int_0^1 (x^3 - x)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1-2}{4} = \boxed{-\frac{1}{4}}$$

EJERCICIO 2. Sea $\bar{X} : (-2,2) \to \mathbb{R}^3$ la curva de ecuación $\bar{x}(t) = (2\cdot \text{sen}\,t, \cos(\pi t), t+1)$. Señálese la ecuación del plano osculador a la curva en $(\emptyset,1,1)$.

$\bar{X}'(t) = (2\cdot\cos t, -\pi\cdot\text{sen}(\pi t), 1)$

$\bar{X}''(t) = (-2\cdot\text{sen}\,t, -\pi^2\cdot\cos(\pi t), 0)$

Un punto (x,y,z) del plano osculador va a verificar:

$$0 = \det(x'(0), x''(0), (x,y,z)-(0,1,1))$$

$$0 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -\pi^2 & 0 \\ x & y-1 & z-1 \end{vmatrix} = -2\pi^2(z-1) + \pi^2 x =$$

$$= -2\pi^2 z + 2\pi^2 + \pi^2 x =$$

$$= \pi^2(-2z+2+x)$$

Por eso la ecuación del plano osculador en $(0,1,1)$ es:

$$0 = -2z + 2 + x$$

$$\boxed{2z - x = 2}$$

EJERCICIO 3. Sea C la curva dada por las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^2 + e^t \\ z(t) = \cos t \end{array}\right] \quad t \in \mathbb{R}$$

¿Triedro de Frenet en el punto $\overline{x}(0)$?

$$\overline{x}(t) = (t^2, t^2+e^t, \cos t)$$

$$\overline{x}'(t) = (2t, 2t+e^t, -\operatorname{sen} t) \rightarrow x'(0) = (0,1,0)$$

$$t(0) = \frac{x'(t)}{\|x'(t)\|} = \frac{(0,1,0)}{\sqrt{1^2}} = (0,1,0)$$

Además:

$$v = \underbrace{[x'(0) \wedge x''(0)]} \wedge x'(0)$$

$$x'(0) \wedge x''(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 2\vec{k} = (-1,0,-2)$$

$$\longrightarrow v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{k} + 2\vec{i} = (2,0,-1)$$

Tiene la misma dirección y sentido que el vector normal principal n por tanto:

$$n = \frac{v}{\|v\|} = \frac{(2,0,-1)}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{(2,0,-1)}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,-1)$$

Por tanto, el vector binomial es:

$$b = t \wedge n = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{k} =$$

$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = (-1,0,-2)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}$$

El triedro de Frenet es: $F = \{t, n, b\}$

EJERCICIO 4. Sea S la superficie dada por:

$$\bar{x}(u,v) = (u, v, u - v^2), \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

señálese la opción correcta:

a) Las otras son falsas.

b) Todos los puntos de S son hiperbólicos. $eg - f^2 < 0$

c) Todos los puntos de S son parabólicos. $eg - f^2 = 0$ y alguno de $e, g, f \neq 0$.

d) " " " " " " elípticos. $eg - f^2 > 0$

e) S tiene puntos elípticos, parabólicos e hiperbólicos.

f) S sólo tiene puntos planos.
↳ $eg - f^2 = 0$
$e = g = f = 0$

Comenzamos determinando las derivadas parciales de $\bar{x}(u,v)$

$$\bar{x}_u(u,v) = (1, 0, 1)$$

$$\bar{x}_v(u,v) = (0, 1, -2v)$$

El vector unitario $\bar{N}$ es:

$$\bar{N} = \frac{\bar{x}_u \wedge \bar{x}_v}{\|\bar{x}_u \wedge \bar{x}_v\|}$$

$$\bar{x}_u \wedge \bar{x}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = \vec{k} - [\pm\vec{i} - 2v\vec{j}] =$$

Calculamos las derivadas segundas:

$$\overline{X}_{uu}(u,v) = (0,0,0)$$
$$\overline{X}_{vv}(u,v) = (0,0,-2)$$
$$\overline{X}_{uv}(u,v) = (0,0,0)$$

Los coeficientes son:

$$e = \overline{N}\cdot x_{uu} = \overline{N}\cdot(0,0,0) = 0$$
$$f = \overline{N}\cdot x_{uv} = \overline{N}\cdot(0,0,0) = 0$$
$$g = \overline{N}\cdot x_{vv} = \frac{(-1,2v,1)}{\sqrt{2+4v^2}}\cdot(0,0,-2) = \frac{-2}{\sqrt{2+4v^2}} \neq 0$$

Entonces:

$$e\cdot g - f^2 = 0\cdot\left(\frac{-2}{\sqrt{2+4v^2}}\right) - 0^2 = 0-0=\underline{\underline{0}}.$$

$g \neq 0$.

→ Todos los puntos de S son parabólicos.

EJERCICIO 5. Sea S la superficie dada por:

$$z = x^2 - y^2 + y$$

Entonces, las curvaturas principales en el punto $(1,0,1)$, ¿Cuáles son?

→ Parametrizamos:

$$\overline{X}_v(u,v) = (0,1,-2v+1)$$

El vector unitario $\overline{N}$ es:

$$\overline{N} = \frac{\overline{X}u \wedge \overline{X}v}{\| \overline{X}u \wedge \overline{X}v \|}$$

$$\overline{X}u \wedge \overline{X}v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & (-2v+1) \end{vmatrix} = \vec{k} - \left(2u\cdot\vec{i} + (-2v+1)\vec{j}\right) =$$

$$= \vec{k} - 2u\vec{i} + (+2v-1)\vec{j} = (-2u, 2v-1, 1)$$

$$\overline{N} = \frac{(-2u, 2v-1, 1)}{\sqrt{4u^2 + (2v-1)^2 + 1}}$$

Calculamos las derivadas segundas:

$$\overline{X}uu(u,v) = (0,0,2)$$

$$\overline{X}vv(u,v) = (0,0,-2)$$

$$\overline{X}uv(u,v) = (0,0,0)$$

Como $p(1,0,1)$: $u = 1$ $v = 0$

$$\overline{N} = \frac{(-2,-1,1)}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{(-2,-1,1)}{\sqrt{6}}$$

$$E = xu \cdot xu = (1,0,2)\cdot(1,0,2) = (1+0+4) = 5$$

$$F = xu \cdot xv = (1,0,2)\cdot(0,1,1) = (0+0+2) = 2$$

$$g = N \cdot \overline{X}vv = \overline{N}\,(0,0,-2) \ldots \sqrt{6}$$

La ecuación de las curvas principales es:

$$(EG - F^2)\cdot k^2 - (E\,g + G\,e - 2\,F\,f)\cdot k + (eg - f^2) = 0$$

Sustituyendo:

$$0 = (5\cdot 2 - 2^2)\cdot k^2 - \left(5\cdot\left(\frac{-2}{\sqrt{6}}\right) + 2\cdot\frac{2}{\sqrt{6}} - 2\cdot\cancel{2}\cdot 0\right)k + \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\cdot\frac{-2}{\sqrt{6}} - 0^2\right)$$

$$(10-4)\cdot k^2 - \left(\frac{-10}{\sqrt{6}} + \frac{4}{\sqrt{6}}\right)\cdot k + \left(-\frac{4}{6}\right) = 0$$

$$6\,k^2 + \frac{6}{\sqrt{6}}\cdot k - \frac{2}{3} = 0$$

$$k = \begin{cases} \dfrac{-\sqrt{6}+\sqrt{22}}{12} = k_1 \\[2mm] \dfrac{-\sqrt{6}-\sqrt{22}}{12} = k_2 \end{cases}$$

Curvas principales:

$$\boxed{\begin{aligned} k_1 &= -\frac{1}{12}\cdot\sqrt{6} + \frac{1}{12}\cdot\sqrt{22} \\ k_2 &= -\frac{1}{12}\cdot\sqrt{6} - \frac{1}{12}\cdot\sqrt{22} \end{aligned}}$$